Lineare Algebra
Höheres Niveau

Diagonalisierung von Matrizen

Einführung: Etwas Theorie und sehr viele Beispiele

Datei Nr. 62165

Stand 23. April 2022

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Mit Matrizen in Diagonalform kann man manche Aufgaben schneller erledigen. Daher zeige ich hier, wie es gelingt, Abbildungsmatrizen bei Wahl einer geeigneten Basis in eine Diagonalform zu bringen.

Inhalt

0 Vorkenntnisse zu Matrizen

1. Ist A eine Matrix, dann heißt **charakteristisches Polynom** von A.

   Für eine zweireihige Matrix: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1$

   Für eine dreireihige Matrix: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix}$

   Diese kann man z. B. mit der Regel von Sarrus berechnen:

Zur Berechnung dreireihiger Determinanten schreibt man die 1. und zweite Spalte noch einmal als hinter die Determinante. Damit gibt es drei abwärts führende und drei aufsteigende Diagonalen:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Aus jeder dieser 6 Diagonalen bildet man ein Produkt. Die drei Produkte aus den abwärts führenden Diagonalen werden addiert, die drei aus den aufsteigenden werden subtrahiert. (Siehe Text 61012)

2. Die Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms heißten **Eigenwerte der Matrix A**.
   Ist λ eine k-fache Nullstelle von P, dann heißt k die **algebraische Vielfachheit** von λ.

3. Ist λ ein Eigenwert von A und $\vec{x} \neq \vec{o}$ ein Lösungsvektor der Gleichung $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$,
   dann heißt $\vec{x}$ ein **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ. Dann gilt: $\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}}$

4. Die linear unabhängigen Eigenvektoren eines Eigenwertes λ spannen den sogenannten Eigenraum von λ. Seine Dimension heißt **geometrische Vielfalt** von λ

5. Eine Matrix, die nur in der Hauptdiagonale Zahlen ungleich 0 hat, heißt **Diagonalmatrix.**

6. Eine Matrix heißt **diagonalisierbar**, wenn das charakteristische Polynom P nur reelle Nullstellen (Eigenwerte) hat und wenn für jeden Eigewert die algebraische und die geometrische Vielfalt übereinstimmen.

7. Eine **Matrix heißt orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden, d.h. wenn die Skalarprodukte ihrer Spaltenvektoren paarweise Null sind und alle Spaltenvektoren normiert sind, d. h. den Betrag 1 haben.

   Dann gilt: $A^{-1} = A^T$, d.h. die transponierte Matrix ist gleich ihrem Inversen.
   Und daraus folgt dann auch $A^T \cdot A = A \cdot A^T = E$

1 Die Geschichte einer fleißigen Matrix ☺☺☺

Es war einmal eine Matrix $A = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, deren Aufgabe es war, einer Abbildung f dabei zu helfen, Vektoren $\vec{x}$ in Vektoren $\vec{y} = f(\vec{x})$ zu verwandeln.

Eines Tages sollte sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ abbilden.

Sie hatte gelernt, dass sie einfach Matrix mal Vektor rechnen musste, und schon war alles fertig.

Das sah dann so aus: $\vec{y} = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 6{,}4 \\ -0{,}8 + 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Als sie einmal nichts zu tun hatte, begann sie, über ihre Arbeit nachzudenken. Und da kam sie auf die Idee, dass doch das alles davon abhing, welche Basis ihr Vektorraum hat, für den sie rechnete.

Sie war es gewohnt, mit der Standardbasis $E = \left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ zu arbeiten.

Das heißt doch, dass ihr Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ doch im Grunde so aussah: $\vec{x} = -1 \cdot \vec{e}_1 + 8 \cdot \vec{e}_2$

Zum Abbilden durfte sie so rechnen *(man sagte ihr, dass das die Linearität sei)*:

$$f(\vec{x}) = f(-1 \cdot \vec{e}_1 + 8 \cdot \vec{e}_2) = -1 \cdot f(\vec{e}_1) + 8 \cdot f(\vec{e}_2)$$

Dazu benötigte sie die Bilder Basisvektoren, die sie so berechnete:

$$f(\vec{e}_1) = A \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(\vec{e}_2) = A \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Jetzt wurde ihr klar: In der 1. Spalte der Abbildungsmatrix steht das Bild des Basisvektors $\vec{e}_1$ und in der 2. Spalte das Bild des Basisvektors $\vec{e}_2$. Wenn die Matrix A also kompliziert aussieht, dann liegt das daran, dass die Basisvektoren ungünstige Bilder erhalten.

Da kam ihr ein toller Einfall: Wenn es ihr gelänge, eine geeignete Basis für die ganzen Rechnungen zu finden, so dass die Matrix sehr einfach wäre, dann hätte sie weniger Arbeit.

Sie probierte nun zahlreiche Basen aus, bis sie diese Basis $B = \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ entdeckte und Erfolg hatte. Was sie nun genau gemacht hat, schauen wir uns an:

Sie hat einfach die Bildvektoren dieser neuen Basisvektoren berechnet:

$$f(\vec{u}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 + 1{,}6 \\ 0{,}8 + 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}_1$$

$$\text{und} \quad f(\vec{u}_2) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 + 0{,}8 \\ -1{,}6 + 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{u}_2$$

Das war natürlich eine Riesenentdeckung, denn damit wurde ihre Abbildungsgleichung viel einfacher. Sie musste nun nur noch einen Vektor in der Darstellung mit der Basis B abbilden, und das gelang so:

Mit der neuen Basis $B = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ hatten die Vektoren ja andere Koordinaten:

$$\vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad \vec{u}_2 = 0 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

und $$\vec{x}_B = x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2 \cdot \vec{u}_2 = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B$$

Und der Bildvektor: $f(\vec{x}) = f(x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2 \cdot \vec{u}_2)$

Die Linearität hilft beim Zerlegen: $f(\vec{x}) = x_1 \cdot f(\vec{u}_1) + x_1 \cdot f(\vec{u}_2)$ (1)

Sie wusste nun ja, was für tolle Basisvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sie gefunden hatte, denn für sie gilt ja:

$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$ und $f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$ (Ev)

Somit konnte sie (1) zu Ende rechnen: $f(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_1 \cdot (-\vec{u}_2)$ (2)

Oder so: $f(\vec{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3),

denn bezüglich der Basis B ist ja $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

(3) sieht in der Matrixschreibweise so aus: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_B$ (4)

Und das ist die Abbildungsgleichung, wenn man die neue Basis B verwendet.

Diese Abbildung verwendet jetzt „nur“ eine Diagonalmatrix.

Nun untersuchen wir diese Rechnung mathematisch.

Was ist einfacher zu berechnen? Die Abbildung f mit der Matrix A oder mit der Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Der abzubildende Vektor war $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B$ je nach verwendeter Basis.

Sein Bildvektor kann daher auf zwei Arten berechnet werden:

Mit der Basis B: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_B$ (*)

Mit der Standardbasis E: $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 6{,}4 \\ -0{,}8 + 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_E$ (**)

Nun rechnet wir noch (*) in die Standardbasis E um:

$$f(\vec{x}_B) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_B = 3 \cdot \vec{u}_1 - 2 \cdot \vec{u}_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_E$$

was natürlich auch mit einer Matrix geht: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_E$

Und man sieht: (*) und (**) liefern dasselbe Ergebnis, nur ist (*) schneller berechnet

Ziel dieses Textes ist es, Abbildungen dadurch zu vereinfachen, dass man für sie eine Diagonalmatrix erstellt, so dass Berechnungen einfacher werden.

Die Basisvektoren, die zu einer Diagonalmatrix führen, sind

Eigenvektoren

Die Aufgabe lautet: Wähle eine günstige Basis, so dass aus der Abbildungsmatrix A eine Diagonalmatrix S wird, wodurch die Abbildung mit S einfacher wird also die mit A.

Diese neuen Basisvektoren hatten in unsrem Beispiel die Eigenschaft

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad \text{und} \quad f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2 \qquad \text{(EV)}$$

was zur Folge hatte:

$$f(\vec{x}) = x_1 \cdot f(\vec{u}_1) + x_1 \cdot f(\vec{u}_2) = x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_1 \cdot (-\vec{u}_2) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}.$$

Diese Diagonalmatrix ist also die Folge der Zeile (EV).

Hätten wir eine Basis mit $f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 \quad \text{und} \quad f(\vec{u}_2) = 3\vec{u}_2$,

wäre die Abbildungsgleichung

$$f(\vec{x}) = x_1 \cdot f(\vec{u}_1) + x_1 \cdot f(\vec{u}_2) = x_1 \cdot \boxed{2\vec{u}_1} + x_1 \cdot \boxed{3\vec{u}_2} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Ganz allgemein ist es das Ziel dieser Umformungen, Basisvektoren zu finden mit den Eigenschaften

$$f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 \quad \text{und} \quad f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2$$

Vektoren, deren Bild ein Vielfaches des Urbilds ist, heißen Eigenvektoren:

$$f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$$

Die Zahl λ, die das Vielfache angibt, nennt man Eigenwert des Eigenvektors.

Wir benötigen zur Lösung unserer Aufgabe also zweierlei Vorkenntnisse:

(1) Wie findet man die Eigenvektoren einer Matrix? Siehe Text 62165

(2) Wie führt man Basis-Transformationen durch. Siehe Text 62160

Es folgt jetzt eine Musterlösung dazu, die ganz ausführlich dargestellt wird.

2 Sehr ausführliches Lehrbeispiel zur Diagonalisierung

Beispiel 1

Gegeben ist die Abbildung f durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}\vec{x}$ bzgl. der Standardbasis E.

a) Bestimme die Eigenvektoren der Abbildungsmatrix A.

b) Diese Eigenvektoren werden als neue Basis B verwendet.
Gib die Abbildungsgleichung bzgl. der Basis B an.

Lösung:

(a) Ausführliche Berechnung der Eigenvektoren

Abbildungsgleichung für $\vec{u}$: $f(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$

Bedingung für Eigenvektoren: $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$

Vergleichen liefert $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ bzw. $A \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Einsetzen der Einheitsmatrix: $\vec{u} = E \cdot \vec{u}$

führt zu $A \cdot \vec{u} - \lambda E \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Ausklammern von $\vec{u}$: $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

Diese Gleichung heißt **Eigenwertsystem** und ist ein homogenes lineares Gleichungssystem.

WISSEN: Ein EWS hat immer den Nullvektor $\vec{o}$ als Lösung. Doch der kann nicht als Basisvektor Verwendung finden. Wir benötigen nicht-triviale Lösungen!
Die Theorie der Gleichungssysteme besagt, dass es genau dann nicht-triviale Lösungen des EWS gibt, wenn die <u>Determinante der Koeffizientenmatrix Null</u> ist.

Jetzt dazu das Zahlenbeispiel:

Ausgehend von $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}\vec{x}$ ist $A = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix.

1. Schritt: Das Eigenwertsystem EWS lautet: $\left[\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Zusammengefasst: $\begin{pmatrix} -0{,}6-\lambda & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

2. Schritt: Bedingung für nicht-triviale Lösungen; $\det(A - \lambda E) = 0$

Dies ist die „charakteristische Gleichung“: $\begin{vmatrix} -0{,}6-\lambda & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Berechnung: $(-0{,}6-\lambda)(0{,}6-\lambda) - 0{,}64 = 0$

Zusammengefasst: $\lambda^2 = 1$

Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$

3.Schritt: Lösung des EWS mit Hilfe der Eigenwerte:

Für $\lambda_1 = \boxed{1}$ lautet das EWS: $\left\{\begin{array}{r}(-0{,}6-1)\cdot u_1 + \quad 0{,}8\cdot u_2 = 0\\ 0{,}8\cdot u_1 + (0{,}6-1)\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$ bzw. $\left\{\begin{array}{r}-1{,}6\cdot u_1 + 0{,}8\cdot u_2 = 0\\ 0{,}8\cdot u_1 - 0{,}4\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$

Die 1. Gleichung ist ein Vielfaches der zweiten, weshalb es unendlich viele Lösungen gibt.

Man kann also z. B. u_1 frei wählen.

Wählt man $u_1 = r, r \in \mathbb{R}$, dann folgt $u_2 = 2r$:

Damit haben wir „einen" <u>ersten Eigenvektor</u> gefunden: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren sind daher ***alle Vielfachen von*** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$. Für sie gilt: $f(\vec{u}_1) = \boxed{1}\cdot\vec{u}_1 = \vec{u}_1$

Für $\lambda_2 = \boxed{-1}$ lautet das (EWS): $\left\{\begin{array}{r}(-0{,}6+1)\cdot u_1 + \quad 0{,}8\cdot u_2 = 0\\ 0{,}8\cdot u_1 + (0{,}6+1)\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$ bzw. $\left\{\begin{array}{r}0{,}4\cdot u_1 + 0{,}8\cdot u_2 = 0\\ 0{,}8\cdot u_1 + 1{,}6\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$

Die untere Gleichung ist das Doppelte der oberen, aus der folgt: $u_1 + 2u_2 = 0$

Wählt man $u_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$, dann folgt $u_1 = -2s$: Eigenvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}$

Eigenvektoren sind daher ***alle Vielfachen von*** $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Für sie gilt: $f(\vec{u}_2) = \boxed{-1}\cdot\vec{u}_1 = -\vec{u}_1$

Ergebnis: Die Matrix A hat die Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ihre Vielfachen

und es gilt: $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$ und $f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$

(b) Abbildungsgleichung auf die Eigenvektoren-Basis B umrechnen:

Hinsichtlich der Eigenvektoren-Basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ haben die Basisvektoren diese Koordinaten:

$$\vec{u}_1 = 1\cdot\vec{u}_1 + 0\cdot\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad \vec{u}_2 = 0\cdot\vec{u}_1 + 1\cdot\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

und ein beliebiger Vektor: $\vec{x} = x_1\cdot\vec{u}_1 + x_2\cdot\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B$

Sein Bild ist: $f(\vec{x}) = f(x_1\cdot\vec{u}_1 + x_2\cdot\vec{u}_2)$

Nun hilft die Linearität beim Zerlegen: $f(\vec{x}) = x_1\cdot f(\vec{u}_1) + x_1\cdot f(\vec{u}_2)$ (1)

Für die Eigenvektoren gilt: $f(\vec{u}_1) = \lambda_1\vec{u}_1$ und $f(\vec{u}_2) = \lambda_2\vec{u}_2$ (EV)

Damit lautet (1): $f(\vec{x}) = x_1\cdot\lambda_1\vec{u}_1 + x_1\cdot\lambda_2\vec{u}_2$ (2)

In der Koordinatenschreibweise: $f(\vec{x}) = x_1\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ (3)

Das sieht in der Matrixschreibweise so aus: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\vec{x}_B$ (4)

Die Abbildungsmatrix hat nun Diagonalform.

Umrechnung einer gegebenen Abbildungsmatrix A mit Matrizen

Herleitung einer Matrixmethode zur Diagonalisierung von A

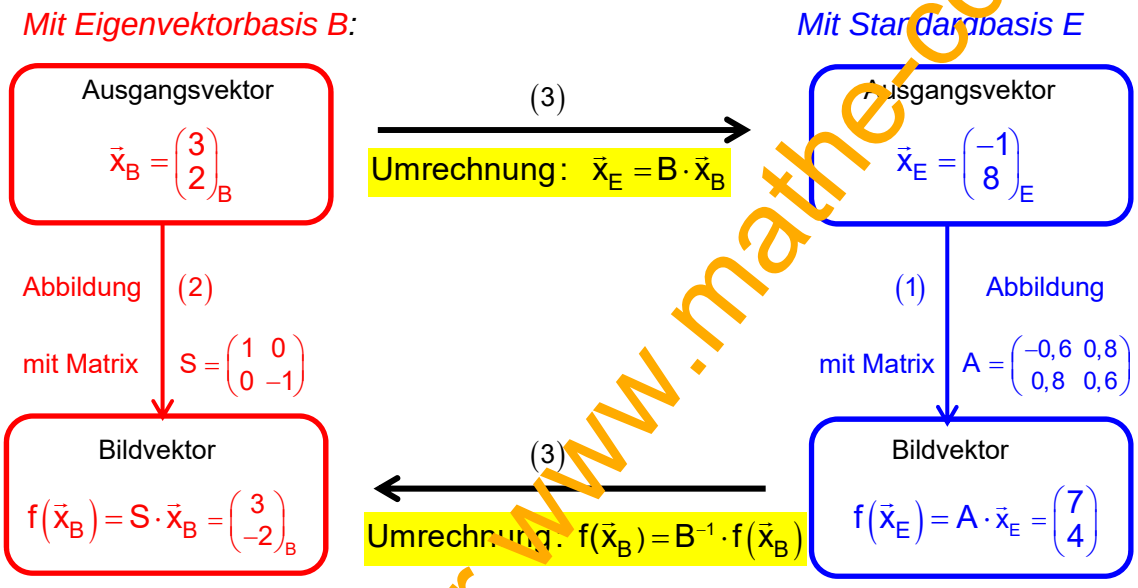
(1) Im ersten Schritt werden die Eigenvektoren berechnet. Sie sollen eine neue Basis B bilden.

(2) Dann stellt man die abzubildenden Vektoren in beiden Basen dar: $\vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B$.

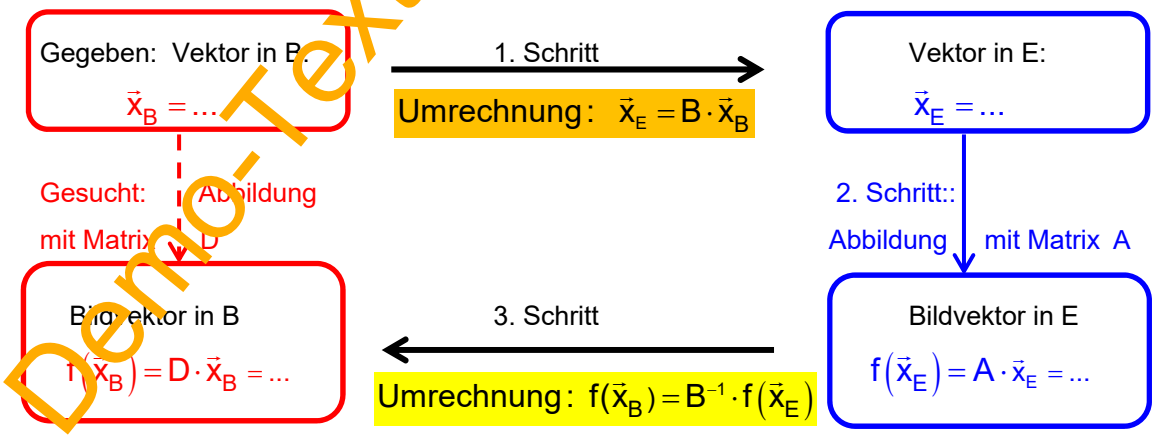
(3) Jetzt bildet man $\vec{x}_E$ mit A in $f(\vec{x}_E)$ ab und $\vec{x}_B$ mit S in $f(\vec{x}_B)$.

(4) Schließlich wurde $f(\vec{x}_B)$ aus der Basis B in die Basis E umgerechnet:

Zahlenbeispiel:



Allgemeine Rechnung für die Formel:



Man erhält also D durch Verkettung dieser drei Abbildungen:

$$\vec{x}_B \xrightarrow[\text{zur Standardbasis E}]{\text{Basis-Transformation}} \vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B \xrightarrow[\text{der Matrix A}]{\text{Abbildung mit}} f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E \xrightarrow[\text{zur Eigenwertbasis B}]{\text{Basis-Transformation}} f(\vec{x}_B) = B^{-1} \cdot f(\vec{x}_E)$$

Ergebnis: $$\vec{x}_B \xrightarrow[\text{neuen Matrix S}]{\text{Abbildung mit einer}} f(\vec{x}_B) = \left(B^{-1} \cdot A \cdot B\right) \cdot \vec{x}_B = D \cdot \vec{x}_B$$

Oder ist für Sie dieser Darstellung besser?

Diese Gleichung in B umrechnen: $f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E$

dazu rechnet man $\vec{x}_E$ und $f(\vec{x}_E)$ auf die neue Eigenvektor-Basis um:

$f(\vec{x}_E) = B \cdot f(\vec{x}_B)$, also: $f(\vec{x}_B) = B^{-1} \cdot f(\vec{x}_E)$ und $\vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B$

Das sieht dann so aus:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}_B) &= B^{-1} \cdot \boxed{f(\vec{x}_E)} \\ \boxed{f(\vec{x}_E)} &= A \cdot \boxed{\vec{x}_E} \\ \boxed{\vec{x}_E} &= B \cdot \vec{x}_B \end{aligned}}$$

Ergebnis: $f(\vec{x}_B) = \boxed{B^{-1} \cdot A \cdot B} \cdot \vec{x}_B$

Zur Abkürzung schreibt man $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$

Das Produkt $B^{-1} \cdot A \cdot B$ ist die vereinfachte Transformationsmatrix D für die Abbildung $f(\vec{x}_B) = D \cdot \vec{x}_B$.

(d) Zahlenbeispiel zur Anwendung:

Unser Beispiel hatte die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,8 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Sie hat die Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten 1 und -1.

. Verwendet man diese Eigenvektoren als Basis, dann hat die Matrix A diese Diagonalform:
$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und die zugehörige Vektorabbildung hat die Gleichung $f(\vec{x}_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_B$.

Wenn man das noch beweisen soll, berechnet man zur Transformationsmatrix

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und erhält dann

$$D = B^{-1} \cdot A \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Sammlung von Musterbeispielen aus $\mathbb{R}^2$

Beispiel 2:

Gegeben sei die Abbildung f durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\vec{x}$.

Diagonalisiere die Matrix .

Zeige eine damit vereinfachte Abbildung des Vektors $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_B$.

a) Berechnung der Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

<u>Eigenwertsystem</u>: $(A - \lambda\cdot E)\cdot\vec{u} = \vec{o}$ also $\begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-\lambda \end{pmatrix}\cdot\vec{u} = \vec{o}$

<u>Charakteristische Gleichung:</u> $\det(A - \lambda\cdot E) = 0$ also $\begin{vmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Eigenwerte sind Lösungen der Gleichung $(0{,}8-\lambda)(0{,}7-\lambda) - 0{,}06 = 0$

d. h. $\lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Für $\lambda_1 = 1$ lautet das EWS: $\begin{cases} (0{,}8-1)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-1)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} -0{,}2\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 - 0{,}3\cdot u_2 = 0 \end{cases}$

Eigenvektoren sind alle Vielfachen von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$

Für $\lambda_2 = 0{,}5$ lautet das (EWS): $\begin{cases} (0{,}8-0{,}5)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-0{,}5)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$ bzw. $u_1 + u_2 = 0$

Eigenvektoren sind alle Vielfachen von $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\vec{u}_2$

b) Diagonalisierung der Abbildungsmatrix:

Verwendet man als neuer Basis $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dann wird die Abbildungsmatrix

diagonalisiert zu $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und die Abbildungsgleichung lautet $f(\vec{x}_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\vec{x}_B$.

(In der Hauptdiagonalen stehen die beiden Eigenwerte.)

Hinweis: Dies zeigt man z. B. auf diesem Weg:

Man rechnet die Vektoren auf die Eigenvektorbasis B um: $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$

und bildet dann ab:

$$f(\vec{x}_B) = f\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B\right) = f(b_1\cdot\vec{u}_1 + b_2\cdot\vec{u}_2) \underset{\text{Linearität}}{=} b_1\cdot f(\vec{u}_1) + b_2\cdot f(\vec{u}_2) = b_1\cdot\vec{u}_1 + b_2\cdot\tfrac{1}{2}\vec{u}_2$$

$$f(\vec{x}_B) = b_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B + b_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\vec{x}$$

c) Zusatzaufgabe: Berechne die Diagonalmatrix ausführlich.

Es sei $\vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B$ mit $B = (\vec{u}_1 \mid \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_E$ (Transformationsmatrix):

Ihr Inverses ist $B^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}_E$ $\quad \vec{x}_B = B^{-1} \cdot \vec{x}_E$

$D = B^{-1} \cdot A \cdot B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Also gilt bzgl. der Basis B: $f(\vec{x}_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_B$ In der Diagonale stehen die Eigenwerte

Beispiel 3

$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$

(a) Berechnung der Eigenvektoren

Eigenwertsystem (EWS): $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ d. h. $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0$

führt auf $\lambda^2 - 15 \cdot \lambda - 100 = 0$ mit $\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{15 \pm 25}{2} = \begin{cases} 20 \\ -5 \end{cases}$

Für $\lambda_1 = 20$ lautet das EWS: $\begin{pmatrix} 4-20 & 12 \\ 12 & 11-20 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$

Lösung ist der Eigenvektor: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen mit $f(\vec{u}_1) = 20 \cdot \vec{u}_1$

Für $\lambda_2 = -5$ lautet das EWS: $\begin{pmatrix} 4+5 & 12 \\ 12 & 11+5 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$

Lösung ist der Eigenvektor: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen mit $f(\vec{u}_2) = -5 \cdot \vec{u}_2$

(b) Diagonalisierung:

Verwendet man statt der Standardbasis E die Eigenvektorbasis $B = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$,,

dann lautet die Abbildungsgleichung $f(\vec{x})_B = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\vec{x}_B$

Zusatz: Wenn man D berechnen soll, geht man so vor:

$D = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & +3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 & -20 \\ 80 & 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 0 \\ 0 & -125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

Wichtiger Hinweis zur Berechnung der inversen Matrix.

Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **ist symmetrisch und orthogonal.**

Daher ist die transponierte Matrix gleich ihrem Inversen!

Das kann man einfach beweisen.

Ich zeige hier lieber statt eines Beweises eine Beispielrechnung:

Gegeben ist $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Wir normieren sie (indem man die Spaltenvektoren auf den Betrag 1 reduziert):

$$\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = 5 \quad \text{und} \quad \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9} = 5$$

Wegen der Symmetrie hat der zweite Spaltenvektor denselben Betrag wie der erste.

Die normierten Spaltenvektoren sind daher $\vec{u}_1{}^* = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2{}^* = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(Sie haben jetzt den Betrag 1.)

Normierte Matrix: $B^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

Berechnung der inversen Matrix:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Nun transponieren wir noch die normierte Matrix:

$$\text{und} \quad B^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \boxed{= B^{-1}}$$

Das erspart die Berechnung der inversen Matrix.

Ein weiteres Beispiel dazu folgt auf Seite 15

Beispiel 4 Diagonalisiere $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnung der Eigenvektoren

Eigenwertsystem (EWS): $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ d, h, $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

führt auf $(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3-\lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$

Für $\lambda_1 = 2$ lautet das EWS: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = -u_2$

Lösung ist der Eigenvektor: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. und alle Vielfachen mit $A \cdot \vec{u} = 2\vec{u}$

Für $\lambda_2 = 4$ lautet das EWS: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} -u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = u_2$

Lösung ist der Eigenvektor: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen mit $A \cdot \vec{u}_2 = 4\vec{u}_2$

(b) Diagonalisierung:

Verwendet man statt der Standardbasis E die Eigenvektorbasis $B = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

dann lautet die Abbildungsgleichung $f(\vec{x})_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\vec{x}_B$

(In der Hauptdiagonale der diagonalisierten Matrix stehen die Eigenwerte.)

Zusatz: Ausführliche Berechnung der Diagonalmatrix

Da die Transformationsmatrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist, kann man (nach Seite 14) die inverse Matrix aus der transponierten normierten Matrix bekommen_

Normierung ergibt: $B^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$: Transponiert: $B^{*T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = B^{-1}$

Das erleichtert die Berechnung der diagonalisierten Matrix D:

$D = \boxed{B^{*-1}} \cdot A \cdot B^* = \boxed{B^{*T}} \cdot A \cdot B^*$ $\qquad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ausklammern: $D = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Beispiel 5 Gegeben ist die Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$. Spezialfall

Diese Matrix ist nicht regulär, denn ihre Determinante ist 0.

Die Abbildung ist also nicht umkehrbar. Was bewirkt hier eine Eigenvektorbasis?

(a) **Bestimmung der Eigenwerte** von $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ d. h. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0$ bzw. $2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$ oder $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

Ausklammern von λ: $\lambda \cdot (\lambda - 3) = 0$ ergibt die Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = 0}$ und $\lambda_2 = 3$

Berechnung der Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 2-0 & 2 \\ 1 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die erste Gleichung ist das Doppelte der zweiten und daher entbehrlich. Es gibt also nur die Bedingung $u_1 + u_2 = 0$. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

Dazu gehört der Eigenvektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen mit $f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$.

das heißt $\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{-a} \end{pmatrix}\right) = \vec{\mathbf{o}}$. Die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ bilden den sogenannten **Kern von f.**

Zu $\lambda_2 = 3$ EWS: $\begin{pmatrix} 2-3 & 2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Dazu die Eigenvektoren $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen mit $f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 = 3 \cdot \vec{u}_2$.

b) **Welche Besonderheit zeigt diese nicht reguläre Abbildung f?**

Zunächst bilde ich einen beliebigen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_E$ ab:

$$f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt: Alle Bildvektoren sind Vielfache von $\vec{u}_2$!!!

Nun schauen wir uns an, wie die **<u>Verwendung der Eigenvektorenbasis</u>**

$B = \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ die Abbildungsmatrix verändert: Es sei $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$.

$$f(\vec{x}_B) = f(b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2) = b_1 \cdot f(\vec{u}_1) + b_2 \cdot f(\vec{u}_2) = b_1 \cdot \vec{o} + b_2 \cdot 3\vec{u}_2 = b_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_B$$

Oder ganz ausführlich mit der Formel:

$$D = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$